Ejercicio 1A del Modelo 5 (Extra Suplente) de 2021 (Análisis)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{\ln(x+1)} - \dfrac{a}{x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución

La regla de L'Hôpital (L'H) dice: Si "f" y "g" son funciones continuas en $[a-\delta, a+\delta]$, derivables en $(a-\delta, a+\delta)$, verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} =$

$= \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. (La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si $x\to\infty$)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+1)\cdot x - a\cdot\ln(x+1)}{x\cdot\ln(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x-a\cdot\ln(x+1)}{x\cdot\ln(x+1)}\right) = \left\{\frac{0-a\cdot 0}{0} = \frac{0}{0};\ L'H\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+1-\dfrac{a}{x+1}}{1\cdot\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}}\right) = \frac{1-a}{0+0} = \frac{1-a}{0}.$$

Como me dicen que el límite existe, **el numerador ha de ser cero,** para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir $1 - a = 0$, de donde **a = 1,** con lo cual tenemos

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+1-\dfrac{1}{x+1}}{1\cdot\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}}\right) = \left\{\frac{1-1}{0+0} = \frac{0}{0};\ L'H\right\} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\dfrac{(-1)}{(x+1)^2}}{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\dfrac{1}{(x+1)^2}}{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}\right) =$$

$$= \frac{2+1/1}{1/1+1/1} = \mathbf{3/2}.$$

Los valores pedidos son **a = 1** y **límite = 3/2**.

Ejercicio 2A del Modelo 5 (Extra Suplente) de 2021 (Análisis)

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{a-x}$ (para $x \neq a$).

a) Halla a y b sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 3) y tiene una asíntota oblicua cuya pendiente vale -4. (1'25 puntos)

b) Para a = 2 y b = 3, calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1. (1'25 puntos)

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{a-x}$ (para $x \neq a$).

a)

Halla a y b sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 3) y tiene una asíntota oblicua cuya pendiente vale -4.

Como la gráfica de f pasa por el punto (2, 3), f(2) = 3 $\rightarrow$ 3 = (4a + b)/(a – 2).

Sabemos que la recta y = mx + n es una asíntota oblicua (A.O.) de la función f(x) si $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (mx+n)] = 0$.

En la práctica $m = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$.

En nuestro caso $-4 = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{x\cdot(a-x)} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{ax^2}{-x^2} = \lim_{x\to\infty}(-a) = -a$, de donde **a = 4.**

De 3 = (4(4) + b)/((4) - 2) $\rightarrow$ 6 = 16 + b, de donde **b = -10.**

b)

Para a = 2 y b = 3, calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Para a = 2 y b = 3 tenemos $f(x) = \frac{2x^2+3}{2-x}$, $f'(x) = \frac{4x\cdot(2-x) - (-1)\cdot(2x^2+3)}{(2-x)^2} = \frac{-2x^2+8x+3}{(2-x)^2}$.

Tenemos f(1) = 5/1 = 5 y f '(1) = 9/1 = 9

La recta tangente en x = 1 es "y - f(1) = f '(1)(x - 1)" → **y - 5 = 9·(x - 1)** → **y = 9x - 4**.

La recta normal en x = 1 es "y - f(1) = (-1/ f '(1))·(x - 1)" → **y - 5 = (-1/9)·(x - 1)** → **y = -x/9 + 46/9**.

Ejercicio 3A del Modelo 5 (Extra Suplente) de 2021 (Análisis)

Considera la función f : R → R definida por $f(x) = x^2 + |x - 1|$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. (1'25 puntos)

b) Calcula $\int_0^2 f(x)dx$. (1'25 puntos)

Solución

Considera la función f : R → R definida por $f(x) = x^2 + |x - 1|$.

a)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

De $|x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, tenemos $f(x) = x^2 + |x-1| = \begin{cases} x^2-x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2+x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

Me piden la monotonía. Estudio de $f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Si x < 1, f '(x) = 2x – 1.

De f '(x) = 0, tenemos 2x - 1 = 0 de donde x = 1/2 < 1, que será el posible extremo relativo.

Como f '(-1) = 2(-1) - 1 = -3 < 0, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-∞, 1/2).**

Como f '(0'7) = 2(0'7) - 1 = 0'4 > 0, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1/2, 1).**

Por definición **x = 1/2 es un mínimo relativo de f y vale f(1/2) =** $(1/2)^2$ - (1/2) + 1 **= 3/4 = 0'75.**

Si x > 1, f '(x) = 2x + 1.

De f '(x) = 0, tenemos 2x + 1 = 0 de donde x = -1/2, que no está en x > 1 luego no es extremo relativo.

Como f '(2) = 2(2) + 1 = -5 > 0, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1, +∞).**

b)

Calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (x^2-x+1)dx + \int_1^2 (x^2+x-1)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = (1/3 - 1/2 + 1) - (0) + (8/3 + 2 - 2) - (1/3 + 1/2 - 1) = \mathbf{11/3 \cong 3'66667.}$$

Ejercicio 4A del Modelo 5 (Extra Suplente) de 2021 (Análisis)

Considera la función f : [0, +∞) → R definida por $f(x) = x\cdot e^x$.

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y las rectas x = 2, y = x. (1 punto)

b) Determina el área del recinto anterior. (1'5 puntos)

Solución

Considera la función f : [0, +∞) → R definida por $f(x) = x\cdot e^x$.

a)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y las rectas x = 2, y = x.

Puntos de corte:

Para x = 0, $f(0) = 0\cdot e^0 = 0\cdot 1 = 0$, punto (0,0).

Para $f(x) = x\cdot e^x = 0$, tenemos x = 0 (la exponencial no se anula nunca). Punto (0, 0), **el único punto de corte con los ejes es el (0, 0).**

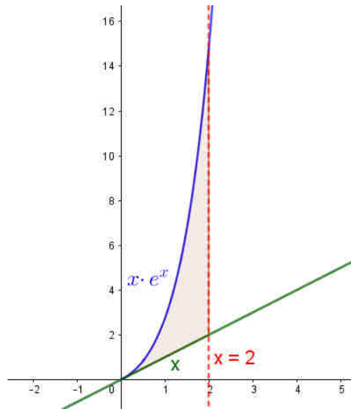
Estudiamos la monotonía, estudio de f ‘(x).

Tenemos $f(x) = x\cdot e^x$, y su derivada es $f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = e^x\cdot(1 + x)$

De $f'(x) = 0$ tenemos $1 + x = 0$ (la exponencial no se anula nunca), de donde $x = -1$, que no está en el dominio.
Como $f'(1) = e^1\cdot(1 + 1) = 2\cdot e > 0$, luego f(x) es **estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en** $(0, +\infty)$.

La recta y = x es la bisectriz del I y III cuadrante.
El corte de x con $x\cdot e^x$ se obtiene de $x = x\cdot e^x \rightarrow x\cdot(1 - e^x) = 0$, de donde $x = 0$ y $1 - e^x = 0$ luego $x = 0$.

Un esbozo de las gráficas es:



b)
Determina el área del recinto anterior.

Calculamos primero la integral $I=\int x\cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u=x & \Rightarrow du = dx \\ dv=e^x dx & \Rightarrow v=\int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + K.$

Luego, **área =** $\int_0^2 (x\cdot e^x - x)dx = \left[x\cdot e^x - e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2$ **= $(2\cdot e^2 - e^2 - 2) - (0 - e^0 - 0)$ u^2 = $(e^2 - 1)$ $u^2 \cong 6'389$ u^2.**

Ejercicio 5B del Modelo 5 (Extra Suplente) de 2021 (Álgebra)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de m existe la inversa de la matriz A? Razona la respuesta. (1’5 puntos)

b) Para m = 1, halla $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$. (1 punto)

Solución

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{pmatrix}$.

a)
¿Para qué valores de m existe la inversa de la matriz A? Razona la respuesta.

La matriz A tiene inversa si su determinante, |A|, es distinto de cero.

Tenemos $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} m & m & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = 2m$, luego **si $m \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = $** $\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

b)

Para m = 1, halla $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$.

Para m = 1, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$ y sabemos que $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$ = $(1/2)^{-1}\cdot A^{-1} = 2\cdot A^{-1}$.

La calculamos: $|A| = 2(1) = 2$; $A^t = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa **es A^{-1} =**

= $\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, por tanto **la matriz medida es $(1/2)^{-1}\cdot A^{-1} = 2\cdot A^{-1}$ =** $2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\right)$ **=**

= $\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ **.**

Ejercicio 6B del Modelo 5 (Extra Suplente) de 2021 (Álgebra)

En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7’50 €. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7’20 €.

a) Calcula, de forma razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja. (1’5 puntos)

b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2 €? Razona la respuesta. (1 punto)

Solución

En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7’50 €. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7’20 €.

a)

Calcula, de forma razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.

Sea x = precio de un café, y = precio de una tostada, z = precio de un zumo de naranja.

De, “tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7’50 €.” $\rightarrow$ 3x + y + 2z = 7’50.

De, “Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7’20 €” $\rightarrow$ 4x + y + z = 7’20.

Tenemos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, en principio es un sistema compatible e indeterminado y tiene más de una solución.

Intentamos resolverlo $\begin{cases}3x + y + 2z = 7'50,\\4x + y + z = 7'20,\ (F_2-F_1)\end{cases} \approx \begin{cases}3x + y + 2z = 7'50\ (E_1-E_2)\\x\ \ - z\ \ \ = -0'3\end{cases} \approx \begin{cases}2x + y + 3z = 7'80\\x\ \ - z\ \ \ = -0'3\end{cases}$, por tanto 2x + y + 3z = 7’80, es decir **el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja es de 7’80€.**

b)

¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2 €? Razona la respuesta. (1 punto)

Tenemos el sistema $\begin{cases}3x + y + 2z = 7'50\\4x + y + z = 7'20\\z = 2\end{cases} \approx \begin{cases}2x + y + 3z = 7'80\\x\ \ - z\ \ \ = -0'3\\z = 2\end{cases}$, de donde x = 2 – 0’3 = 1’7 y entrando en la 1ª $\rightarrow$ 2(1’7) + y + 3(2) = 7’80 **luego y = -1’6, lo cual es absurdo pues si un zumo de naranja costase 2 € la cafetería me tendría que pagar 1’60 € por tomarme una tostada**.

Ejercicio 7B del Modelo 5 (Extra Suplente) de 2021 (Geometría)

Considera el punto P(1, 0, 1) y el plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$.

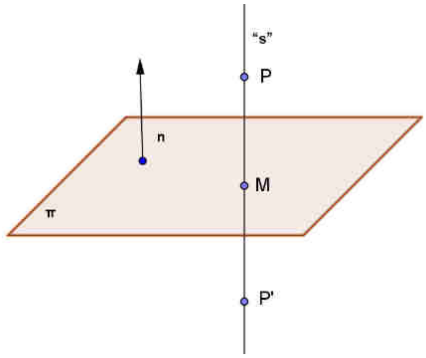
a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π. (1’25 puntos)

b) Halla la distancia del punto P al plano π. (1’25 puntos)

Solución

Considera el punto $P(1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$.
a)
Halla el simétrico del punto P respecto al plano π.

Tenemos que obtener la proyección ortogonal M de P sobre π, para lo cual calculamos la recta "s" perpendicular ($\perp$), al plano π (el vector director **u** de la recta "s" es el vector normal **n** del plano π) por el punto P. Determinamos el punto proyección $M = s \cap \pi$, y la proyección M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido.



Del plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$, tenemos su vector normal **n** = (1, -1, 1).
La recta $\perp$ es "s(P; **u**)" = s(P; **n**) con P(1, 0, 1) y **n** = (1, -1, 1).

Su ecuación vectorial es $s \equiv (x, y, z) = (1 + b, - b, 1 + b)$ con $b \in R$.

$M = s \cap \pi$, sustituimos la ecuación de la recta en el plano y obtenemos el parámetro "b", y luego el punto M.

$(1 + b) - (-b) + (1 + b) + 1 = 0$, de donde $3 + 3b = 0$, luego **b = -1** y el punto M es M(1 + (-1), -(-1), 1 + (-1)) =
= M(0, 1, 0).

M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido.

(1, 0, 1) = ((1 + x)/2, (0 + y)/2, (1 + z)/2), de donde:

1 = (1 + x)/2, es decir **x = 1.**
0 = (y)/2, es decir **y = 0.**
1 = (1 + z)/2), es decir **z = 1.**

El simétrico pedido es P'(1, 0, 1).
b)
Halla la distancia del punto P al plano π.

Por la construcción realizada d(P; π) = d(P, M) = ||**PM**||.
P(1, 0, 1), M(0, 1, 0), **PM** = (-1, 1, -1), luego la distancia pedida es **d(P; π) = d(P, M) = ||PM||** =
= $\sqrt{(1)^2+ (1)^2+ (1)^2}$ u^1 **= $\sqrt{(3)}$ u^1 = 1'732 u^1.**

Ejercicio 8B del Modelo 5 (Extra Suplente) de 2021 (Geometría)

Considera las rectas $r \equiv \dfrac{x - 2}{-2} = y - 1 = \dfrac{z}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$.
a) Estudia la posición relativa de r y s. (1'25 puntos)
b) Calcula, si es posible, el plano que contiene a r y a s. (1'25 puntos)

Solución

Considera las rectas $r \equiv \dfrac{x - 2}{-2} = y - 1 = \dfrac{z}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$.

a)
Estudia la posición relativa de r y s.

De la recta "r" tomamos un punto, el A(2, 1, 0) y un vector director, el **u** = (-2, 1, -2).

De la recta "s" tomamos un punto, el B y un vector director, el **v.**

Para el punto tomo y = 0, con lo cual x = 3 y z = 2. Punto B(3, 0, 2).

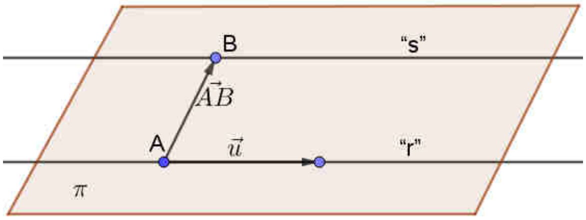
El vector **v** lo calculo como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta "s", es decir **v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(2-0) - **j**(1-0) + **k**(2-0) = (2, -1, 2)

Como los vectores **u** = (-2, 1, -2) de "r" y **v** = (2, -1, 2) de "s" son proporcionales, los vectores **u** y **v** son paralelos, por tanto las rectas "r" y "s" son paralelas. Veamos si son coincidentes o nó.

Si A(2, 1, 0) $\in$ "s" son coincidentes. **Como** $\begin{cases} (2) + 2(1) = 3 \text{ <<FALSO>>} \\ 2(1) + (0) = 2 \text{ CIERTO} \end{cases}$ **, las rectas "r" y "s" son paralelas y distintas**.

b)

Calcula, si es posible, el plano que contiene a r y a s.



Para el plano necesitamos el punto A(2, 1, 0) (contiene a "r") y dos vectores independientes, el **u** = (-2, 1, -2) (contiene a "r") y el AB = (1, -1, 2).

El plano que contiene a r y s, $\pi \equiv$ det(**AX**, **u**, **AB**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= (x-21)(-2-2) - (y-1)(-4+2) + (z)(2+1) **= -4x + 2y + 3z + 6 = 0 = 4x - 2y - 3z - 6 = 0**.